Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________

Carné: ______________ Sección: _____

MA-2112 Abril-Julio 2012

1$^{\text{er}}$ Examen Parcial (50%) **Tipo B**

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es esta función diferenciable en el origen?

(12 puntos)

Solución:

Comenzamos calculando, por definición, las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Queremos ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\right|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0.$$

Esto es $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left|\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x^2y^2|}{x^2+y^2} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ nos queda que si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2}\right| = |y^2| < \delta^2 = \varepsilon.$$

Así, f es diferenciable en $(0,0)$.

Pregunta 2. Considere la función $H(t) = f(g(t))$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $g(t) = (-t^2, 2t)$. Determine $\nabla f(-1,2)$ sabiendo que $H'(1) = H''(1) = 4$ y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,2) = 0$$

(13 puntos)

$H'(t) = \nabla f(g(t)) \nabla g(t)$

$4 = \nabla f(g(1)) \nabla g(1) =$

Solución:

Primero observamos que $H(1) = f(g(-1,2))$, y $H'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t)$.

Usando la regla de derivación para funciones compuestas nos queda

$$H'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

que en $t = 1$ da

$$4 = H'(1) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)$$

Derivando por segunda vez nos queda

$$H''(t) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}y'(t)\right)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial x}x''(t) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}x'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'(t)\right)y'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y''(t)$$

lo que evaluado en $t = 1$ nos da

$$4 = H''(1) = 4 - 2\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) + 4$$

Nos queda el sistema

$$\begin{aligned} -2\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) &= 4 \\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) &= 4 \end{aligned}$$

Así, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 4$ y $\nabla f(-1,2) = (2,4)$.

Pregunta 3. Escriba la fórmula de Taylor de 2do orden para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{2x+3y}$ en el punto (0,0).

(12 puntos)

Solución:

La fórmula de Taylor de f en el origen es

$$f[(0,0) + (x,y)] = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + Hf(0,0)(x,y) + R_2[(0,0),(x,y)]$$

donde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2[(0,0),(x,y)]}{x^2+y^2} = 0.$$

Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2e^{2x+3y}, 3e^{2x+3y}\right)$$

y así, $\nabla f(0,0) = (2,3)$.
Por otro lado,

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2x+3y} & 6e^{2x+3y} \\ 6e^{2x+3y} & 9e^{2x+3y} \end{bmatrix}$$

De donde

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Así la fórmula de Taylor se ve como

$$f(x,y) = f(0,0) + (2,3) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R_2[(0,0),(x,y)]$$

Es decir

$$e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + R_2[(0,0),(x,y)].$$

HOLA ♡

Pregunta 4. Halle los extremos absolutos para la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ en la región $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$

(13 puntos)

Solución:

Completando cuadrados en la ecuación $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ nos queda $(x-1)^2 + y^2 = 4$. Así, K es un disco cerrado de radio 2, centrado en el punto $(1, 0)$, y por lo tanto un conjunto compacto. Esto nos permite utilizar el teorema de existencia de máximos y mínimos.

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 3 < 0\}$. Entonces $K = D \cup \partial D$.

En D podemos usar el criterio de la primera derivada,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Longrightarrow \quad (2x, 6y) = (0, 0)$$

Así, el único punto crítico en D, es $p_1 = (0, 0)$.

En ∂D usamos el método de multiplicadores de Lagrange, tomando como restricción

$$g(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$$

En los puntos críticos tenemos $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, es decir

$$\begin{array}{rcll} 2x & = & \lambda(2x - 2) & (1) \\ 6y & = & \lambda 2y & (2) \end{array}$$

La ecuación (2) nos da $2y(3 - \lambda) = 0$, es decir $y = 0$ o $\lambda = 3$.

Con $y = 0$, en la restricción nos queda $(x - 3)(x + 1) = 0$, es decir $x = 3$ o $x = -1$.

Con $\lambda = 3$, en la ecuación (1) nos queda $2x - 6x + 6 = 0$, que nos da $x = \frac{3}{2}$, y usando la restricción nos queda $\frac{1}{4} + y^2 = 4$ es decir $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.
Así, tenemos los puntos $p_2 = (3, 0)$, $p_3 = (-1, 0)$, $p_4 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ $p_5 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$.

Finalmente, evaluando en la función nos queda:

$$f(p_1) = 0, \quad f(p_2) = 9, \quad f(p_3) = 1, \quad f(p_4) = f(p_5) = \frac{27}{2}$$

Así el mínimo absoluto de f es 0 y se alcanza en $p_1 = (0, 0)$, y el máximo absoluto es $\frac{27}{2}$ y se alcanza en $p_4 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2})$ y $p_5 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$.